

Im nichtlinearen Fall gilt das
nicht ∇

Beispiel :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

hier: $f(t, y) = 1 + y^2$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Satz 22.1 + 2 $\Rightarrow$

$\exists$ eine eindeutige lokale Lsg.

$$y: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

"Erinnerung" $\Rightarrow y(t) = \tan t$,
und diese Lösung lebt auf dem maxi-
malen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ∇

3.) (für Details vgl. Hildebrandt,
Analysis I, p. 364 $\S$.)

Notation: Eine Funktion $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
heißt maximale Lösung des AWP's

$$\begin{cases} \gamma(t_0) = \gamma_0, \\ \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad t \in I, \end{cases}$$

wenn es keine Lösung $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$
gibt, die auf einem Intervall $J \not\supset I$
definiert ist. Hierbei: I, J Intervalle
mit $t_0 \in I, J$.

Man kann zeigen:

Unter den Voraussetzungen von Satz 22.2
lässt sich dort gefundene Lösung zu
einer maximalen Lösung fortsetzen.

Spezialfall: $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, f wie in 22.2

Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale

Lösung von

$$\begin{cases} \gamma(t_0) = y_0, \\ \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad t \in I. \end{cases}$$

Es gilt:

Satz: Seien $\alpha < \beta$ die Grenzen von I .

Dann gilt:

i) $\alpha = -\infty$ oder

ii) $\alpha > -\infty$. In diesem Fall ist

$$\lim_{t \downarrow \alpha} |\gamma(t)| = +\infty.$$

iii) $\beta = +\infty$ oder

iv) $\beta < +\infty$. In diesem Fall

gilt $\lim_{t \uparrow \beta} |\gamma(t)| = +\infty.$

4.) Ist f aus 22.2 lediglich
stetig auf G , so kann man noch
Existenz von Lösungen zum AWP beweisen,
 die Eindeutigkeit geht aber verloren.
 (Satz von Peano)

Vergleiche hierzu unser

Beispiel:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(t) = \sqrt[3]{y(t)^2} \end{cases}$$

Beweis von Picard-Lindelöf :

-142-

(Umformulierung des Problems :) Sei

$I \subset \mathbb{R}$ ein noch beliebiges Intervall

mit $t_0 \in I$. Dann gilt für $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
 C^1

$$\text{(AWP)} \quad \begin{cases} \gamma(t_0) = y_0, \\ \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad t \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) \, ds, \\ t \in I \quad (\text{Integralgleichung}) \end{cases}$$

Hauptsatz

$$\Leftrightarrow T(\gamma) = \gamma \quad (\text{Fixpunktproblem})$$

mit dem Operator

$$T(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Nun passe „ α “ so an, dass der Fixpunktsatz greift. Zunächst fixiere $r > 0$ mit

$$V := [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B_r(y_0)} \subset G,$$

o. E. sei f bzgl. y Lipschitz auf V mit Konstante L .

V ist kompakt und f stetig $\Rightarrow$

$$M := \sup_V |f| < \infty$$

Für $\varepsilon < r$ seien

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I} := \mathcal{I}_\varepsilon := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \\ X := (C^0(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty), \\ A := \{y \in X : \|y - y_0\|_\infty \leq r\}, \\ T: A \rightarrow X \text{ wie oben} \end{array} \right.$$

beachte :

- A ist die abgeschlossene Kugel in X um die Konstante Funktion y_0 mit Radius r
- $T(y), y \in X$, ist nach dem Hauptsatz sogar $C^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$, speziell also ein Element von X

① Beh: erfüllt ε die Forderung

$$\varepsilon < \frac{\tau}{M},$$

so folgt $T(A) \subset A.$

Bew: Sei $y \in A \Rightarrow \|T(y) - y_0\|_\infty$

$$= \left| \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \quad (*)$$

Für $t \in I$ und s zwischen t_0 und t

ist $|s - t_0| \leq |t - t_0| \leq \varepsilon < \tau$

und $(y \in A) \quad |y(s) - y_0| \leq \tau$

$$\Rightarrow (s, y(s)) \in V \Rightarrow |f(s, y(s))| \leq M$$

es folgt:

$$\textcircled{*} \leq M \cdot \sup_{t \in I} |t - t_0| = M\varepsilon < r$$

$\uparrow$
Vor

D.h.: $\|T(y) - y_0\|_\infty < r$

$$\Rightarrow \boxed{T(y) \in A}$$

② Beh: erfüllt ε zusätzlich

$$\boxed{\varepsilon \leq \frac{1}{2L}},$$

so ist $T: A \rightarrow A$ eine
strikte Kontraktion.

Bew: Seien $\varphi, \psi \in A \xrightarrow{\text{n.o.}}$

$$(\rho, \varphi(\rho)), (\rho, \psi(\rho)) \in V \quad \text{für alle } \rho \in I$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|T(z) - T(\gamma)\|_{\infty} &= \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t (f(r, y(r)) - f(r, \gamma(r))) dr \right| \\ &\leq L \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t |y(r) - \gamma(r)| dr \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - \gamma\|_{\infty} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Unter den genannten Bedingungen an ε ist
 T eine strikte Kontraktion, es gibt
 einen Fixpunkt $y \in A$. Dieser ist die
 gesuchte lokale Lösung des AWP' r_0 . $\square$

Zusatz zu Satz 22.2:

(globale Existenz bei linearem Wachstum)
für $G = I \times \mathbb{R}^n$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall
(auch $I = \mathbb{R}$!) . $F: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
sei stetig mit (globale Lipschitz Bdg.)

$$(1) \quad |F(t, y) - F(t, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}|$$

$$\forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in I \times \mathbb{R}^n$$

und (lineares Wachstum)

$$(2) \quad |F(t, y)| \leq a(|y| + 1)$$

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$$

mit Konstanten $L, a > 0$.

Dann gibt es zu $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$
genau eine Lösung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

des AWP's

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in I. \end{cases}$$

Bem: (2) kann man streichen! Argumentiere auf $I_K \nearrow I$,
 I_K kompakt; dort ergibt sich (2) aus (1).

Anwendung: lineare Systeme

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}, \quad b(t) = (b_i(t))_{1 \leq i \leq n}$$

mit $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (und
beschränkt) $\left[a_{ij}, b_i \in L^\infty \right]$
ist wohl nicht nötig!

$$F(t, y) := A(t)y + b(t) \quad \uparrow \quad \text{s. später (p. 163)}$$

$\Rightarrow$: Das

$$(AWP) \begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar.

Diskussion von (2):

149*

Aus (1) folgt

$$|F(t, y)| \leq |F(t, y_0)| + L|y - y_0|$$

$$\Rightarrow |F(t, y)| \leq L \cdot |y| + L|y_0| + |F(t, y_0)|$$

Ist I kompakt, so folgt (Stetigkeit von F)

$$\sup_{t \in I} |F(t, y_0)| < \infty,$$

d.h. man bekommt (2), also gibt es nach dem Zusatz eine Lösung.

Sei I nicht kompakt. Dann betrachte

$$I_k \text{ (kompakt)} \uparrow I$$

mit Lösungen u_k . Eindeutigkeitssatz

$$\Rightarrow u_k = u_{k+1} \text{ auf } I_k$$

Also wird eine Lösung u auf I definiert.

Beweis des Zusatzes : $\underbrace{t_0 \in J}$

Sei J kompaktes Intervall $\subset \mathbb{I}$, $X :=$

$C^0(J, \mathbb{R}^n)$, $A := X$, T wie vorher.

Fall 1 : $L \cdot |J| < 1$

$$\Rightarrow \|T(\varphi) - T(\psi)\|_\infty = \sup_{t \in J} \left| \int_{t_0}^t (\overline{F}(r, \varphi(r)) - \overline{F}(r, \psi(r))) dr \right|$$

$$\leq |J| \cdot L \|\varphi - \psi\|_\infty$$

$$\Rightarrow T : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (X, \|\cdot\|_\infty)$$

strikte Kontraktion

Fall 2 : $|J| L \geq 1$

normiere X mit

(vgl. Kabballo,
Analysis II,
p. 224)

$$\|y\|_L := \sup_{t \in T} \left\{ |y(t)| \exp(-2L|t-t_0|) \right\}$$

(Zeige: $(X, \|y\|_L)$ ist vollständig!)

$$\Rightarrow |T(y)(t) - T(y')(t)| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^t |y(s) - y'(s)| ds \right| =$$

$$\leq \int_{t_0}^t \exp(-2L|s-t_0|) \exp(2L|s-t_0|) \cdot |y(s) - y'(s)| ds \leq$$

$$\leq \underbrace{\|y - y'\|_L \int_{t_0}^t \exp(2L|s-t_0|) ds}_{\leq \frac{1}{2L} \exp(2L|t-t_0|)}$$

$$\Rightarrow \|T(y) - T(y')\|_L \leq \frac{1}{2} \|y - y'\|_L$$

$\Rightarrow T$ strikte Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|_L$

Ergebnis von Fall 1+2:

man kann das AWP auf jedem
kompakten Intervall $J \subset I$ mit
 $t_0 \in J$ lösen

Bdg. (2) wird hierzu nicht benötigt!

ausreichend sind Stetigkeit von F
 und globale partielle Lipschitz
 Bedingung bzgl. $y \in \mathbb{R}^n$

Fall I : das vorgegebene Intervall I
ist kompakt

dann wähle oben $J := I$

Fall II : I nicht kompakt

Schreibe $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, J_k kompakt,

$t_0 \in J_k$, $J_k \subset J_{k+1}$, Lösung y_k
auf J_k ;

Satz 22.1 $\Rightarrow y_k = y_{k+1}$ auf J_k

setze also $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$y(t) := y_k(t),$$

falls $t \in J_k$

